Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015
UE de Géométrie

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. ($\star$) Soit E un espace euclidien, $v \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $v(F^\perp) = v(F)^\perp$. En particulier, si F est stable par v, alors $F^\perp$ est stable par v.

Exercice 2. ($\star$) Soient E et E' des espaces euclidiens de même dimension et $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des espaces affines euclidiens sur E et E'. Soit $(A, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n})$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}$ et f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

1. f est isométrique.
2. l'application linéaire associée L_f est orthogonale.
3. $(f(A), f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), ...f(\mathbf{e_n}))$ est un repère orthonormé de $\mathcal{E}'$

Exercice 3. ($\star$) Soit E un espace euclidien. Soit $f : E \to E$ une application conservant le produit scalaire. Montrer que f est linéaire.

Exercice 4. ($\star$) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine notée O. Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui conserve les distances.

1. Montrer que pour tous $(X, Y) \in \mathcal{E}^2$, $\langle \overrightarrow{f(O)f(X)}, \overrightarrow{f(O)f(Y)} \rangle = \langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle$.
2. En déduire que l'application f est affine.

Exercice 5. Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathbb{R}u$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Soit r une rotation quelconque de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $r \circ R \circ r^{-1}$. En déduire le centre de $SO_3(\mathbb{R})$.

Exercice 6. Soit un espace vectoriel euclidien E et $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels orthogonaux.

1. Montrer que la composée des symétries orthogonales par rapport à F et à G commutent et que c'est la symétrie par rapport au sous-espace $(F \oplus G)^\perp$.
2. On se place dans $\mathbf{R}^3$. Soit σ_x (resp. σ_y) la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $\langle(1, 0, 0)\rangle$ (resp. $\langle(0, 1, 0)\rangle$). Donner la table de composition du sous-groupe de O_3 engendré par σ_x et σ_y.

Exercice 7. ($\star$) Dans un espace affine euclidien, soient trois points A, B et G. Montrer que G est barycentre de $((A, \alpha), (B, 1 - \alpha))$ si et seulement si pour tout point O, on a

$$\alpha OA^2 + (1 - \alpha)OB^2 = OG^2 + \alpha GA^2 + (1 - \alpha)GB^2.$$

Exercice 8. ($\star$) Montrer qu'une symétrie n'est une isométrie que si c'est une symétrie orthogonale.

Exercice 9. Soit E un espace euclidien et v un endomorphisme de E tel que $vov = id_E$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

1. v est un endomorphisme orthogonal.
2. $v^* = v$
3. $E = E_{-1} \oplus E_1$ somme directe orthogonale.

Exercice 10. ($\star$)

1. Montrer que si x et y sont deux vecteurs de même norme d'un espace vectoriel euclidien E, alors il existe un hyperplan H tel que $s_H(x) = y$ et montrer que H est unique si $x \neq y$.
2. Montrer que si A et B sont deux points d'un espace affine euclidien, il existe un hyperplan affine $\mathcal{H}$ tel que $\sigma_{\mathcal{H}}(A) = B$ et que $\mathcal{H}$ est unique si $A \neq B$. On l'appelle hyperplan médiateur de $[AB]$.

Exercice 11. L'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, reconnaître l'application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui à M de coordonnées (x, y, z) associe $f(M)$ de coordonnées (x', y', z') et préciser ses éléments caractéristiques.

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = -z + 1 \\ y' = -x \\ z' = y - 2 \end{array} \right. \qquad (b) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{9}(x - 8y - 4z + 1) \\ y' = \frac{1}{9}(-8x + y - 4z + 2) \\ z' = \frac{1}{9}(-4x - 4y + 7z + 3) \end{array} \right. \qquad (c) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = -z + 1 \\ y' = x \\ z' = y - 2 \end{array} \right.$$

Exercice 12. ($\star$) soit $\mathcal{C}$ un cube dans l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. Montrer que l'ensemble G des applications affines f de $\mathcal{E}$ telles que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ est un sous-groupe des isométries de $\mathcal{E}$ et préciser son ordre.